

Trabajo final de grado
GRADO DE MATEMÁTICAS
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

IMPLEMENTACIÓN Y
CONSTRUCCIÓN DE MODELOS
MATEMÁTICOS EN 3D

Danny Larrea

Director: Sergio Muria Maldonado
Departamento de Matemáticas e Informática
Barcelona, 29 de junio de 2017

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Summary | 1 |
| Introducción | 2 |
| 1. Visualización | 6 |
| 1.1. Contexto histórico | 6 |
| 1.2. Visualización en las matemáticas | 7 |
| 1.3. Razonamiento con imágenes | 8 |
| 2. Ecuaciones diferenciales | 11 |
| 2.1. Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales | 11 |
| 2.2. Clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos | 13 |
| 2.3. Retrato de fase de un campo vectorial en \mathbb{R}^3 | 16 |
| 3. Geometría diferencial en curvas y superficies | 19 |
| 3.1. Superficies parametrizadas | 20 |
| 3.2. Superficies regladas | 21 |
| 3.3. Implementación y construcción 3D de superficies regladas | 24 |
| 4. Mathematica e impresión 3D | 29 |
| 4.1. Ilustraciones | 29 |
| 4.2. Impresión 3D | 31 |
| Conclusión | 34 |
| Bibliografía | 37 |

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1. | Esponja de Menger. | 3 |
| 1.1. | $X \simeq \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ | 8 |
| 1.2. | $\mathbb{T}^2 - \{x\}$, donde $x \in \mathbb{T}^2$ | 9 |
| 1.3. | $Y = C_1 \cup C_2$ | 9 |
| 2.1. | Atractor de Lorenz. | 13 |
| 2.2. | Sistemas lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^3 | 14 |
| 2.3. | Sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^3 | 15 |
| 2.4. | Sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^3 | 15 |
| 2.5. | Output gráfico obtenido con el Mathematica. | 17 |
| 2.6. | Trayectoria con condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{1}{1000})$ | 18 |
| 3.1. | Superficies parametrizadas | 20 |
| 3.2. | Algunos ejemplos de superficies regladas. | 22 |
| 3.3. | Superficies impresas. | 23 |
| 3.4. | Outputs notebook. | 25 |
| 3.5. | Hiperboloide de una sola hoja. | 26 |
| 3.6. | PlotPoints. | 27 |
| 3.7. | Impresión 3D de un hiperboloide de revolución de una hoja. | 28 |
| 4.1. | Visualización del modelo antes de imprimir. | 31 |
| 4.2. | Estructura secundaria. | 32 |
| 4.3. | Disolución del material hidrosoluble. | 32 |
| 4.4. | Impresiones 3D | 33 |

Summary

Visualization has always been an important ingredient for communicating mathematics. Figures and models have helped to express ideas even before formal mathematical language was able to describe the structures. This project consists in the implementation and representation of 3D mathematical models (virtual and physical) through software that allow visualizing, understanding and assuming problems, ideas and mathematical concepts for a better study.

Introducción

En esta sección se presenta el propósito del trabajo junto con su justificación y alcance, el cual se divide en los objetivos y limitaciones. También se incluyen la distribución de la memoria, el software y la maquinaria que se utiliza en este trabajo.

Propósito de estudio

El objetivo principal del estudio desde un principio fue el uso de software para la implementación 3D de modelos matemáticos que aporten un valor añadido a la hora de entender un concepto específico dentro de las matemáticas, pasando finalmente a la construcción real, en el caso de que sea posible, de los modelos implementados con la ayuda de impresoras 3D.

Justificación del estudio

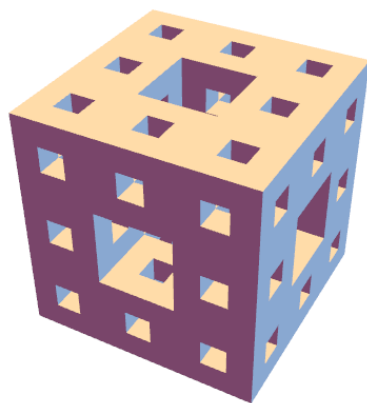
La contribución de la visualización a la educación matemática se ha convertido en una herramienta importante para la divulgación (Segerman, 2016; [12]) y entendimiento de la misma. Varios investigadores (Lyn, 1997; [8] / Presmeg, 2006; [11]) han demostrado que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar enormemente el aprendizaje de las matemáticas. No hay que obviar también que la visualización ha ayudado a expresar ideas incluso antes de que el lenguaje formal fuera capaz de describir las estructuras matemáticas.

Partiendo de la premisa del uso de la visualización como refuerzo a la comprensión de las matemáticas y sin perder de vista que independiente de la representación visual las matemáticas se han de demostrar rigurosamente utilizando teoremas, proposiciones, axiomas, etc. desarrollaremos el tema de la visualización en las matemáticas aprovechando el impacto real y potencial de la tecnología en la educación matemática y en otros ámbitos.

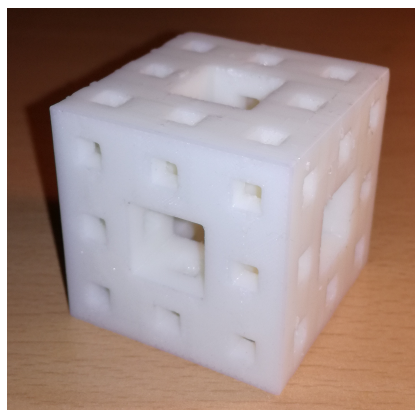
Se ha visto que, desde 2003, la tecnología de impresión 3D ha mostrado un gran crecimiento, y se ha vuelto significativamente menos costosa y más disponible, poniéndolas al alcance de personas e instituciones educativas. Además de surgir diferentes repositorios de modelos imprimibles en 3D para la educación entre los cuales destacamos thingiverse [14] por su sección dedicada específicamente a educación.

Los programas que permiten la implementación de gráficos en 3D también están ampliamente disponibles, donde hace 10 años pocos podían permitirse el software para diseñar en tres dimensiones, ahora cualquier persona con un ordenador puede descargar una gran

variedad de software como lo son el SketchUp¹ o Blender². Nosotros, en particular, trabajaremos con el Mathematica³, un ejemplo de lo que puede llegar a implementar este software es la figura 1; esta representa la esponja de Menger la cual es un conjunto fractal en el espacio tridimensional.



(a) Mathematica



(b) impresión 3D

Figura 1: Esponja de Menger.

Debido a todo esto, la impresora 3D ha encontrado su camino en el aula, en particular para las asignaturas como ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas; a nivel de educación primaria, ESO, Bachillerato y Universidad.

Personalmente, he escogido este tema como trabajo de fin de grado ya que creo que la potencia didáctica que tiene una imagen correctamente explicada y bien fundamentada es espectacular, además de ayudar a divulgar y asumir conceptos que no son obvios del todo. Ligando el trabajo con los estudios del grado, se han considerado dos temas de estudio a nivel universitario, en donde la visualización nos permite interpretar distintas características analíticas. Estos se verán desarrollados en el capítulo 2 y 3 de la memoria. En el primer caso, se continua con la teoría cualitativa que se estudia en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, buscando retratos de fases de campos vectoriales en el espacio. Mientras que en el segundo caso desarrollaremos más ampliamente el estudio de superficies visto en la asignatura de Geometría Diferencial en Curvas y Superficies.

¹SketchUp es un programa de diseño gráfico y modelado en tres dimensiones (3D) basado en caras. Para entornos de arquitectura, ingeniería civil, diseño industrial, diseño escénico, videojuegos o películas.

²Blender es un programa informático multiplataforma, dedicado especialmente al modelado, iluminación, renderizado, animación y creación de gráficos tridimensionales. También de composición digital utilizando la técnica procesal de nodos, edición de vídeo, escultura (incluye topología dinámica) y pintura digital.

³Mathematica es un programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemática y áreas computacionales. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también un poderoso lenguaje de programación de propósito general. Su lenguaje de arquitectura e interfaz dinámica hace posible un enfoque único y flexible para la representación gráfica y la visualización de la información.

Alcance del estudio

El estudio contempla el uso de software e impresoras 3D para la implementación de modelos relacionados con las ecuaciones diferenciales y con la geometría diferencial en curvas y superficies.

Los objetivos específicos del proyecto son:

- Estudiar las posibilidades que nos ofrece trabajar con el Mathematica.
- Crear un notebook⁴ que modele el comportamiento de las trayectorias de un sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^3 .
- En el caso de las trayectorias, evaluar los modelos utilizando la clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos.
- Crear un notebook que represente cualquier superficie reglada.
- En el caso de las superficies regladas, caracterizar los modelos obtenidos utilizando elementos como la línea de estricción en el caso que la superficie sea no cilíndrica y distintos resultados numéricos que cumple la superficie.
- Justificar la implementación e impresión de modelos relacionados con las superficies regladas.
- Crear un sitio web que sirva como repositorio de los modelos y notebooks que se esperan implementar a lo largo de este trabajo.

Las limitaciones del proyecto son:

- Se ha decidido programar utilizando únicamente el software Mathematica. Hemos tenido en cuenta que hay diversos programas de edición 3D en el mercado pero nos propusimos trabajar con el Mathematica aprovechando la licencia de estudiante que nos proporciona la facultad y teniendo en cuenta a su vez que es un software puramente de enfoque matemático.
- Aprendizaje autónomo del lenguaje que utiliza el Mathematica.

Distribución de la memoria

Esta memoria consta de 4 capítulos. En el primer capítulo se presentará una breve explicación del concepto de visualización dentro del ámbito de las matemáticas, finalizando el capítulo con la ejemplificación de razonamientos visuales aplicados a la topología. En el segundo capítulo implementaremos modelos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales, analizando el atractor de Lorenz y luego ejemplificando con retratos de fase de diversos sistemas la clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos. En el tercer capítulo se ilustran modelos de superficies para luego pasar a su representación tangible

⁴Notebook interface Mathematica. Allows interact with the Wolfram System by creating interactive documents.

producto de la impresión 3D, justificando a su vez dicha implementación. Los modelos de este capítulo están relacionados con la Geometría Diferencial en Curvas y Superficies. En el último capítulo hablaremos del Mathematica y la interpretación que ofrece de las matemáticas, para por fin terminar con la impresión 3D.

Se ha creado un google site en donde se recopilan todos los modelos creados en la memoria y otros que no aparecen en esta, la página web es la siguiente: <https://sites.google.com/view/visualizacion>

Hemos de tener en cuenta que el pensamiento visual en las matemáticas es extenso, lo cual se debe a la diversificación de áreas de estudios que hay dentro de la misma, por lo tanto los capítulos 2 y 3 pueden ser leídos independientemente una vez finalizada la lectura del capítulo 1 el cual sienta y justifica las bases de la memoria. Antes de empezar el desarrollo del trabajo nos planteamos las siguientes interrogantes: ¿el uso de la visualización en las matemáticas es razonable?, ¿mejora el entendimiento de las matemáticas?, ¿se puede utilizar como refuerzo de una demostración matemática?, ¿qué relación existe, si existe alguna, entre los procesos de intuición y razonamiento? Todas estas preguntas plantean el área central que intenta abordar este trabajo.

Software e impresión 3D

Los programas Tinkercad⁵, OPenscad⁶, Sketchup, GeoGebra⁷, entre otros, son una muestra de software de diseño 2D/3D que suele ser utilizado en la educación primaria y secundaria; haciendo especial hincapié en el programa GeoGebra el cual es muy utilizado por profesores de secundaria y está posicionado como una herramienta que proporciona una gran ayuda en la enseñanza de las matemáticas. Además de permitir al estudiante manipular construcciones realizadas por otras personas y deducir relaciones, resultados y propiedades de los objetos que intervienen.

Aprovechando la licencia del software Mathematica, que nos facilita la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona, he realizado los diversos modelos que se implementan y construyen a lo largo del proyecto. Además de tener a disposición el uso de distintas impresoras 3D por parte de la entidad CESIRE⁸ creamat.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a mi tutor Sergio Muria por la dedicación y guía a lo largo del proceso de completar el presente trabajo. De la misma manera, quiero agradecer a mi familia y amigos por el apoyo y soporte que me han brindado.

⁵Tinkercad es un software gratuito online creado por la empresa Autodesk, una de las empresas punteras en el software de diseño 3D.

⁶OpenSCAD es una aplicación libre para crear objetos sólidos de CAD. No es un editor interactivo sino un compilador 3D basado en un lenguaje de descripción textual. Un documento de OpenSCAD especifica primitivas geométricas y define como son modificadas y manipuladas para reproducir un modelo 3D.

⁷GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades.

⁸CESIRE, Centre de Recursos Pedagògics Específics de Suport a la Innovació i la Recerca Educativa del Departament d'Ensenyament.

Capítulo 1

Visualización

En este capítulo justificaremos el porqué de la utilización de imágenes, animaciones, modelos impresos, etc. en la educación matemática. Expondremos ideas reflejadas en diversos estudios, artículos y libros publicados a lo largo de las dos últimas décadas.

1.1. Contexto histórico

La visualización está siendo reconocida como un aspecto importante en el razonamiento matemático, esto se debe al crecimiento tecnológico que se llevó y que se está llevando a cabo actualmente. Además, estudios especializados han puesto de manifiesto que las actividades que fomentan la construcción de imágenes pueden mejorar notablemente el aprendizaje matemático y contribuir de manera significativa a que la comprensión en los estudiantes sea más profunda, como se expone en *The role of imagery in mathematical reasoning*¹ (Brown & Wheatley, 1994). En este sentido los procesos intuitivos y de visualización se están revelando como un campo de investigación enormemente interesante en sí mismo y como un recurso alternativo muy efectivo para ayudar a los estudiantes a hacer matemáticas.

El artículo presentado por Norma Presmeg² (Presmeg, 2006; [11]) permite constatar que hasta la década de los 80 apenas pueden encontrarse investigaciones específicas sobre visualización en la enseñanza matemática. Es a partir de ese momento, de la mano de la psicología, cuando se retoman o inician estudios. Podríamos diferenciar distintas etapas. Una primera, que denominamos de los inicios: en la primera mitad del s. XX, los enfoques conductistas influyen en que este tema no sea una prioridad. Sin embargo, entre las décadas de 1970 y 1980 emerge de nuevo la investigación en imágenes desde su base psicológica con metodologías tanto cuantitativas como cualitativas, sobre todo las últimas. Se investigan tanto las ventajas y desventajas, como los aspectos cognitivos y afectivos. Se realizan los primeros estudios sobre pensamiento geométrico espacial (con sólidos), relación con la intuición y representaciones de funciones con ordenadores.

Una segunda etapa se podría considerar en los años 90, en la que la visualización se reconoce como un campo específico de investigación dentro de la enseñanza matemática. Se realizan estudios en varias líneas sobre: a) desarrollo curricular y áreas particulares

¹Brown & Wheatley exponen el papel significativo de la imaginación en el razonamiento matemático.

²Presmeg, Norma. Teacher Education, Teaching Methods, Curriculum Theory. PhD.

de las matemáticas; b) búsqueda de tipologías de enseñanza y prácticas de clase que promueven (o inhiben) una visualización matemática efectiva – entre ellas se encuentran las que estudian la influencia de las tecnologías (visualizaciones dinámicas) o las que estudian diferencias individuales, de género y entre el experto/novicio en el uso de la visualización, y uso que hacen los matemáticos expertos –; c) establecimiento de categorías de imágenes (p. e. Presmeg); y d) estatus de la visualización y rechazo a visualizar en matemáticas – identificación de imágenes prototípicas y dificultades con la generalización y estudios longitudinales para explorar la evolución individual de las formas y los usos de imágenes (por ejemplo, la confirmación de la hipótesis de Kosslyn³).

Y la tercera etapa, Presmeg la sitúa del 2000 en adelante. En este periodo se amplía la visión de la visualización hacia sus aspectos semióticos. Se focaliza en cómo toman cuerpo las ideas matemáticas, de ahí los trabajos sobre gesticulación. Se afianzan los estudios sobre las conexiones entre diferentes registros matemáticos y flexibilidad cognitiva. Y se constata la necesidad de dar consistencia a teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la educación matemática.

Desde 2006, no sólo queda abierta la necesidad de unificación de teorías, sino que se demandan trabajos prospectivos en la relación entre imágenes personales y aspectos emocionales del aprendizaje y en discriminar más finamente cómo ayudan o perjudican las imágenes en los procesos de abstracción, generalización y “reificación⁴” de los objetos matemáticos.

1.2. Visualización en las matemáticas

El término visualización se usa de distintas maneras en el contexto de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas. Algunas definiciones de uso frecuente son las siguientes:

Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981).

En el prefacio a *Geometría e Imaginación*, David Hilbert escribió: “En matemáticas [...] encontramos dos tendencias presentes. Por un lado, la tendencia hacia la abstracción busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes a la maraña de material que se está estudiando, y organizar tal material de una forma sistemática y ordenada. Del otro lado, la tendencia hacia el entendimiento intuitivo favorece una comprensión más inmediata de los objetos que se estudian, una conexión viva con ellos, por así decirlo, que hace hincapié en el significado concreto de sus relaciones. Con la ayuda de la imaginación visual podemos iluminar los variopintos hechos y problemas de la geometría y, más allá de esto, es posible en muchos casos describir el esquema geométrico de los métodos de investigación y demostración...”. Siguiendo a Hilbert, utilizamos el término visualización para describir el proceso de producir o utilizar representaciones geométricas o gráficas de conceptos, principios o problemas

³Kosslyn realizó un estudio cronométrico de las imágenes mentales, centrada fundamentalmente en el estudio de sus propiedades espaciales.

⁴La “reificación” es hacer algo real, llevar algo al ser, o hacer algo concreto.

matemáticos (Zimmerman & Cunningham, 1991).

La visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido (Duval, 1999). Cuando una persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática), hay una imagen visual en la mente de la persona guiando tal creación. Por tanto, la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático (Presmeg, 2006; [11]).

Para el desarrollo de este trabajo vamos a entender el término visualización desde una concepción global:

Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión.

1.3. Razonamiento con imágenes

En esta sección empezaremos a ligar el concepto de visualización, visto en la anterior sección, con temas de estudios vistos en el grado de matemáticas.

La importancia de basarse en imágenes para el razonamiento matemático, comprensión de una idea y resolución de un problema ha sido muy reconocido a la hora de desarrollar teorías y conceptos. Como un ejemplo de esto, siguiendo un razonamiento visual se pueden concluir enunciados topológicos como los siguientes:

Un cubo lleno $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ privado de tres cilindros verticales y disjuntos entre ellos tres, denotemos este espacio como X ; tiene el mismo tipo de homotopía que la unión puntual de tres copias disjuntas de \mathbb{S}^1 [9].

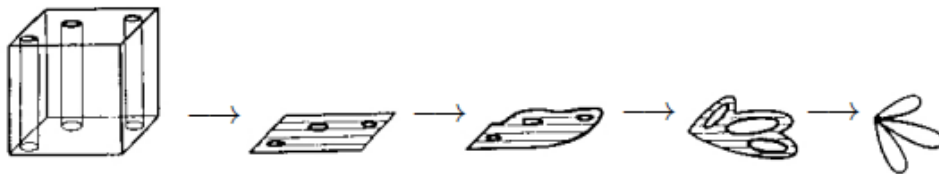


Figura 1.1: $X \simeq \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$.

Donde \simeq denota ser homotópicamente equivalentes (o del mismo tipo de homotopía). En la figura 1.1 se pueden ver las transformaciones necesarias para llegar a mostrar dicha equivalencia homotópica, el cual es un buen ejemplo del razonamiento previo al desarrollo analítico que se hará a posteriori.

De manera parecida, el resultado siguiente es trivial siguiendo un razonamiento visual. Sea X el complementario de un punto en el toro \mathbb{T}^2 ; el grupo fundamental de X es $\langle a, b \rangle$.

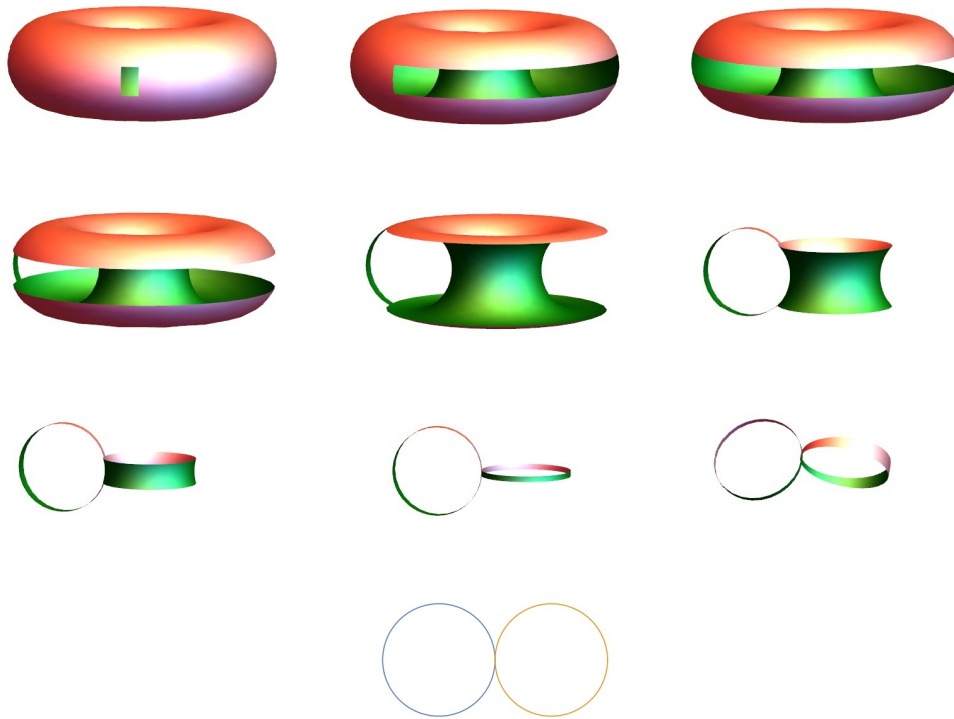
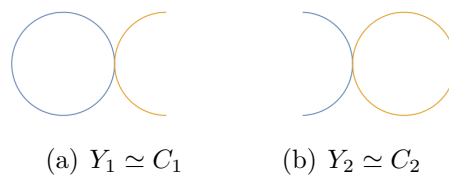


Figura 1.2: $\mathbb{T}^2 - \{x\}$, donde $x \in \mathbb{T}^2$.

Partiendo del resultado de las transformaciones vistas en la figura 1.2, y con la ayuda del teorema de Seifert van-Kampen [4] basta con calcular el grupo fundamental de $C_1 \cup C_2$, donde $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$ y $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$.

Sea Y la reunión de dos circunferencias C_1 y C_2 que se cortan en un punto. Si tomamos $Y_1 = (x, y) \in Y | x \leq \frac{1}{2}$ y $Y_2 = (x, y) \in Y | -\frac{1}{2} \leq x$ [Figura 1.3]. Notemos que se verifican las condiciones del teorema de Seifert-van Kampen y que $Y_1 \cap Y_2$ es contractil.



(a) $Y_1 \simeq C_1$

(b) $Y_2 \simeq C_2$

Figura 1.3: $Y = C_1 \cup C_2$.

La deformación $F : Y_1 \times I \mapsto Y_1$

$$F((x, y), t) = \begin{cases} (x, y), & x \leq 0 \\ (1, 0) + \frac{(1-t)(x, y) - (1, 0)}{|(1-t)(x, y) - (1, 0)|}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

hace que $Y_1 \simeq C_1$. Por argumentos similares se obtiene que $Y_2 \simeq C_2$. Sabemos que una equivalencia de homotopía induce isomorfismo en los grupos fundamentales y el grupo

fundamental de la circunferencia es el grupo libre generado por un elemento. Así que $\pi_1 Y_1 \cong \langle a \rangle$ y $\pi_1 Y_2 \cong \langle b \rangle$. Entonces $\pi_1 Y \cong \langle a, b \rangle$.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales

El objetivo de este capítulo es implementar el retrato de fase de un campo vectorial en \mathbb{R}^3 . Partiendo del estudio de la teoría cualitativa que se hace en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, determinaremos el retrato de fase de distintos sistemas, lo cual es realmente interesante, pues en la mayoría de ocasiones no es posible encontrar explícitamente las soluciones de una ecuación diferencial ni mucho menos el retrato de fase de aquellos sistemas. Actualmente la teoría cualitativa es significativa para muchos problemas no lineales que trascienden a la Mecánica Celeste, como también en un estudio sobre dinámicas de poblaciones.

En la primera sección explicaremos las clases de órbitas que existen y lo ejemplificaremos estudiando el atractor de Lorenz. En la segunda sección buscaremos retratos de fases de sistemas lineales hiperbólicos concluyendo con la clasificación topológica de estos, con lo cual, visualizar estos sistemas permitirá entender la conjugación topológica entre ellos. Para cerrar el capítulo, veremos otras funcionalidades del Mathematica relacionadas con las ecuaciones diferenciales.

Preliminares

Daremos por sentada parte de la teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales [13] y comenzamos dando algunas definiciones que necesitamos para conseguir el propósito de este capítulo.

2.1. Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales

Iniciaremos este capítulo estudiando sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = X_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (2.1)$$

llamados autónomos¹. Utilizaremos la interpretación que nos ofrece el Mathematica para

¹Una ecuación diferencial que no dependen de t .

implementar el retrato de fase de (2.1). Mientras que en la siguiente sección haremos una descripción completa del retrato de fase de un sistema lineal hiperbólico.

Definición 2.1.0.1. *El conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$ es la imagen de la curva integral en X por el punto p , llamada órbita de X por el punto p .*

Observación 2.1.1. $q \in \gamma_p \iff \gamma_q = \gamma_p$. En otros términos, dos órbitas de X coinciden o son disjuntas, pudiendo cada una ser:

- a) una curva abierta y simple.
- b) un punto.
- c) difeomorfa a un círculo.

En el caso de b) $p = \gamma_p$; la órbita se llama punto singular; en el caso de c) la órbita se llama periódica. Correspondiendo cada caso a una de las alternativas del Teorema 2.1.2.

Teorema 2.1.2. *Si φ es una solución máxima de (2.1) en I , entonces se da una de las siguientes alternativas:*

- a) φ es una imersión inyectiva.
- b) $I = \mathbb{R}$ y φ es constante.
- c) $I = \mathbb{R}$ y φ es periódica, es decir, existe un $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ si $|t_1 - t_2| < \tau$.

Ejemplo 2.1.3. Aplicaremos estos hechos para estudiar el atractor de Lorenz, el cual está regido por el sistema de tres ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = \theta(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (2.2)$$

Con θ, ρ y β parámetros reales y $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ derivadas temporales de x, y, z , respectivamente. Este atractor surgió a través del estudio de Edward N. Lorenz de ecuaciones de fenómenos atmosféricos. El sistema también aparece en modelos simplificados de láseres (Haken, 1975).

Resolviendo el sistema de Lorenz con la ayuda de la función **NDSolve** que implementa el Mathematica para $\theta = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$, se obtiene la figura 2.1. Las trayectorias del sistema cruzan de un foco hacia el otro del atractor, oscilando en forma espiralada.

En la figura 2.1 se muestran las trayectorias dentro del sistema para dos condiciones iniciales distanciadas $2 \cdot 10^{-3}$ en la coordenada x . Para las demás variables se han mantenido las condiciones iniciales fijas en 0. La órbita γ_p del sistema por el punto $p = (\frac{1}{1000}, 0, 0)$ es la representada en color azul. Mientras que la órbita γ_q del sistema por el punto $q = (-\frac{1}{1000}, 0, 0)$ es la representada en color rojo.

La figura 2.1 nos permite apreciar el hecho de que dos evoluciones temporales del sistema con un pequeño cambio en las condiciones iniciales divergen entre sí después de un cierto tiempo. Además, podemos ver que cada una de las dos órbitas es una curva abierta y simple.

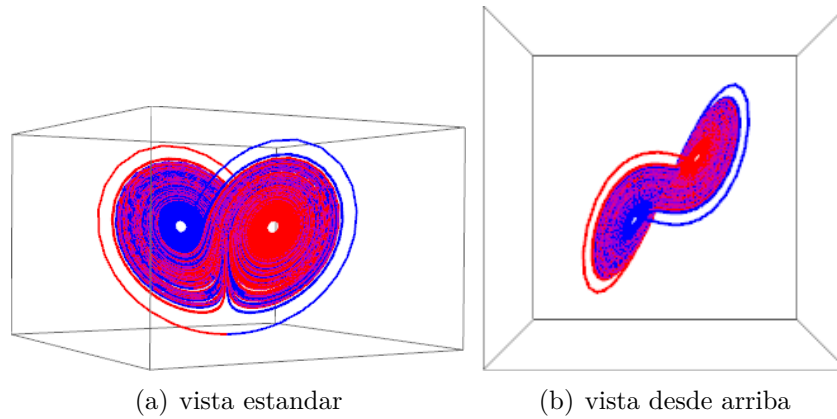


Figura 2.1: Atractor de Lorenz.

Este tipo de sistema demuestra la sensibilidad de la evolución temporal respecto de las condiciones iniciales. Dado que uno puede medir dichas condiciones con una cierta precisión, esto afecta directamente la capacidad de predicción sobre un sistema real que se comporte como un atractor caótico debido a la imposibilidad de determinar a largo plazo la evolución del sistema.

2.2. Clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos

En esta sección consideraremos sistemas lineales de la forma $\dot{x} = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^3$. Más precisamente, sistemas lineales hiperbólicos. Ilustraremos el comportamiento de las trayectorias de algunos sistemas lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^3 . Hablaremos sobre la conjugación topológica entre dos sistemas lineales hiperbólicos.

Definición 2.2.0.1. *Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ (o campo vectorial lineal $x \rightarrow Ax$ con origen $0 \in \mathbb{R}^n$) se llama hiperbólico si todos los valores propios de A tienen parte real diferente de cero. El número $s = s(A)$ de valores propios, contando multiplicidades, que tienen parte real negativa, se llama índice de estabilidad del sistema.*

Definición 2.2.0.2. *Se llama subespacio estable de $\dot{x} = Ax$ al subespacio maximal E^s , invariante por A tal que A/E^s tiene todos sus valores propios como parte real negativa. Analogamente, se define subespacio inestable de $\dot{x} = Ax$ al subespacio maximal E^u donde A/E^u tiene todos sus valores propios como parte real positiva.*

Ejemplo 2.2.1. En sistemas del plano el índice de estabilidad de un sistema silla es 1, de un foco atractor es 2 y de foco repulsor es 0.

En general, en un sistema de \mathbb{R}^n , el índice de estabilidad de un atractor es n , mientras que el de un repulsor es 0.

Las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 muestran el retrato de fase de algunos sistemas lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^3 .

Observación 2.2.2. Denotaremos como λ_1, λ_2 y λ_3 a los valores propios del sistema.

La figura 2.2(a) representa el retrato de fase de un sistema lineal hiperbólico con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que:

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$
- $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$

Al ser un sistema atractor se cumple que $E^s = \mathbb{R}^3$, mientras que $E^u = \{0\}$. Como podemos observar en la imagen, las doce soluciones representadas del sistema (cada una de ellas con distintas condiciones iniciales) convergen al origen.

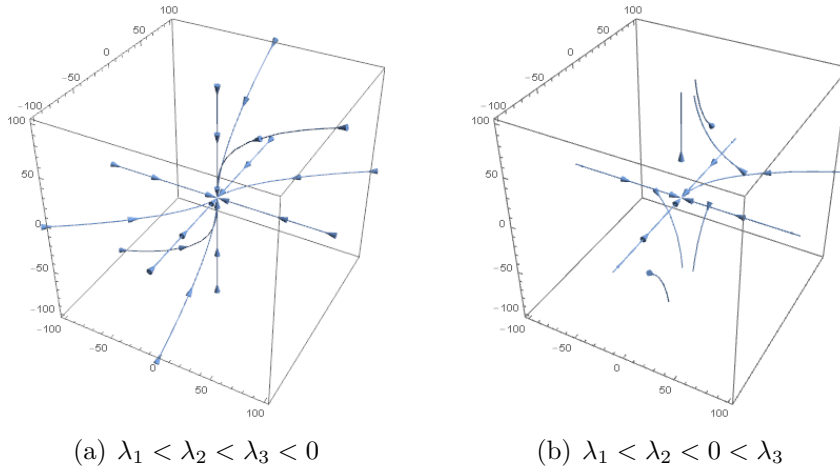


Figura 2.2: Sistemas lineales hiperbólicos en \mathbb{R}^3 .

La figura 2.2(b) representa el retrato de fase de un sistema lineal hiperbólico con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que:

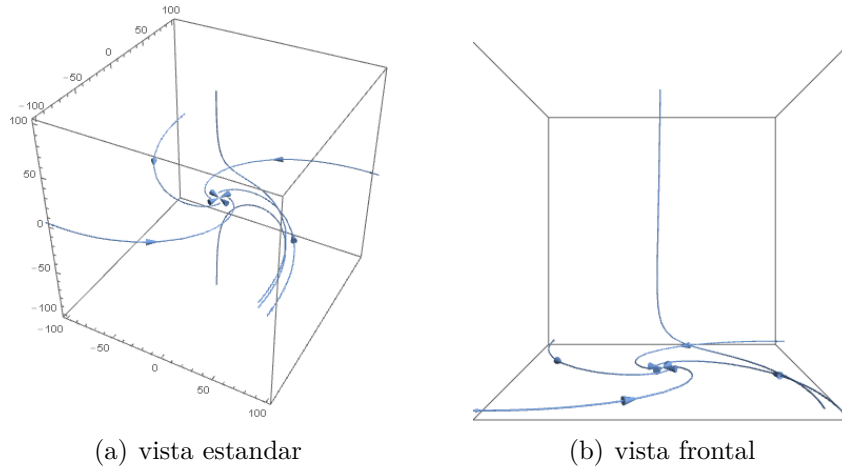
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$

El sistema no es atractor como el primer sistema, se puede observar en la imagen que tiene un subespacio inestable, de hecho, podemos observar que las soluciones con condición inicial que pertenecen al plano $\{z = 0\}$ son estables y convergen al origen, mientras que para el resto de soluciones tales que su condición inicial no tienen tercera coordenada nula se van al infinito.

Las figuras 2.3(a) y 2.3(b) representan el retrato de fase de un mismo sistema lineal hiperbólico con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_3 \in \mathbb{R}^3$
- $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0 < \lambda_3$ y λ_1 es el conjugado de λ_2 .

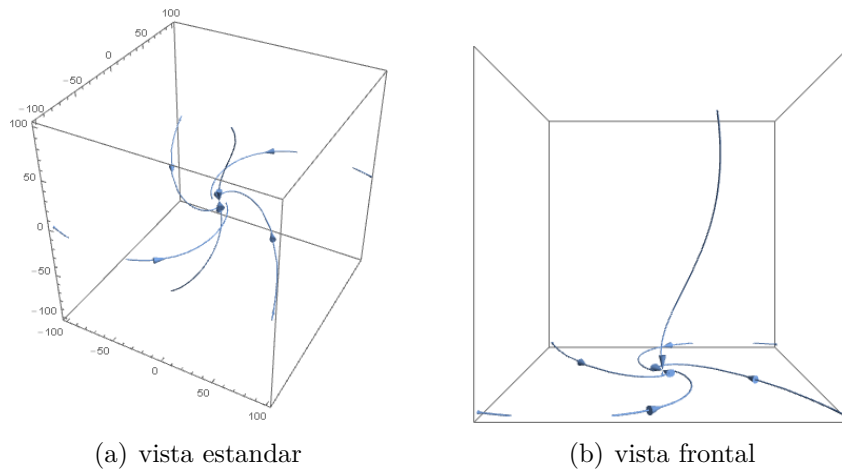
El sistema no es atractor, podemos observar que las soluciones con condición inicial que pertenecen al plano $\{z = 0\}$ son estables y convergen al origen, mientras que para el resto de soluciones tales que su condición inicial no tienen tercera coordenada nula se van al infinito.


 Figura 2.3: Sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^3 .

Las figuras 2.4(a) y 2.4(b) representan el retrato de fase de un mismo sistema lineal hiperbólico con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_3 \in \mathbb{R}$
- $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < \lambda_3 < 0$ y λ_1 es el conjugado de λ_2 .

El sistema es atractor, podemos observar todas las soluciones convergen al origen. El índice de estabilidad es 3.


 Figura 2.4: Sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^3 .

Proposición 2.2.3. Sea $\dot{x} = Ax$ un sistema lineal hiperbólico de índice de estabilidad β .

1. $\mathbb{R}^3 = E^s \oplus E^u$ y E^s y E^u son invariantes por el sistema, esto es, para todo $x \in E^i, i = s, u$ la trayectoria del sistema, $e^{tA}x$, pertenece a E^i para todo $t \in \mathbb{R}$. La dimensión de E^s es igual a β .

2. Existen $\mu > 0$ y $K > 1$ tales que:

$$a) |e^{tA}| \leq Ke^{-\mu t}|x|, \text{ para todo } x \in E^s \text{ y } t \geq 0$$

$$b) |e^{tA}| \leq Ke^{\mu t}|x|, \text{ para todo } x \in E^u \text{ y } t \leq 0$$

Observación 2.2.4. Si h es una conjugación lineal entre dos sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$, cuyos subespacios estables son E^s y E_1^s , entonces $h(E^s) = E_1^s$.

Teorema 2.2.5. Dos sistemas lineales hiperbólicos $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ en \mathbb{R}^n son topológicamente conjugados si y solamente si tienen el mismo índice de estabilidad.

Ejemplo 2.2.6. Los sistemas mostrados en las figuras 2.2(a) y 2.4 son topológicamente conjugados.

2.3. Retrato de fase de un campo vectorial en \mathbb{R}^3

Sabemos que la implementación de retratos de fase de sistemas en el plano se puede obtener mediante el estudio de la teoría cualitativa. Además, existen múltiples programas que realizan esta representación como dfield and pplane², mientras que para sistemas en el espacio a primera mano dicha representación queda descartada. Esta carencia nos empuja a obtener una ilustración del comportamiento de las trayectorias de un sistema lineal en \mathbb{R}^3 . Una vez hecho el estudio encontramos que, efectivamente, se puede obtener el retrato de fase de cualquier sistema lineal en el espacio.

Con la ayuda del Mathematica podemos generar el retrato de fase [Figura 2.5] del sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 9y - 2z \\ \dot{y} = 2x + 5y - 2z \\ \dot{z} = -3x + 13y - z \end{cases} \quad (2.3)$$

Un primer estudio local nos muestra que el sistema tiene valores propios, $\sigma(A) = \{\lambda_0 = -4, \lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i\}$. Por lo que tenemos que $\lambda_0 < 0$ y $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 3 > 0$, siendo un sistema lineal hiperbólico. Así pues, el origen es un punto de silla.

- El subespacio estable es: E^s de dimensión 1 (recta).
- El subespacio inestable es: E^u de dimensión 2 (plano).

Para generar el output gráfico [Figura 2.5] se resolvió el problema del valor inicial (PVI) con el Mathematica para cada una de las siete condiciones iniciales, cada solución muestra una trayectoria diferente. Las trayectorias que se muestran con color lila son atractoras, mientras que las que se muestran con color verde son repulsoras. Además de poder observar que el sistema no se corresponde a un sistema atractor [Definición 2.2.0.2].

Este tipo estudio, el cualitativo, se lleva acabo en la parte final de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, llegando a implementar únicamente sistemas del plano.

²dfield (direction field) and pplane (phase plane) are software programs for the interactive analysis of ordinary differential equations (ODE).

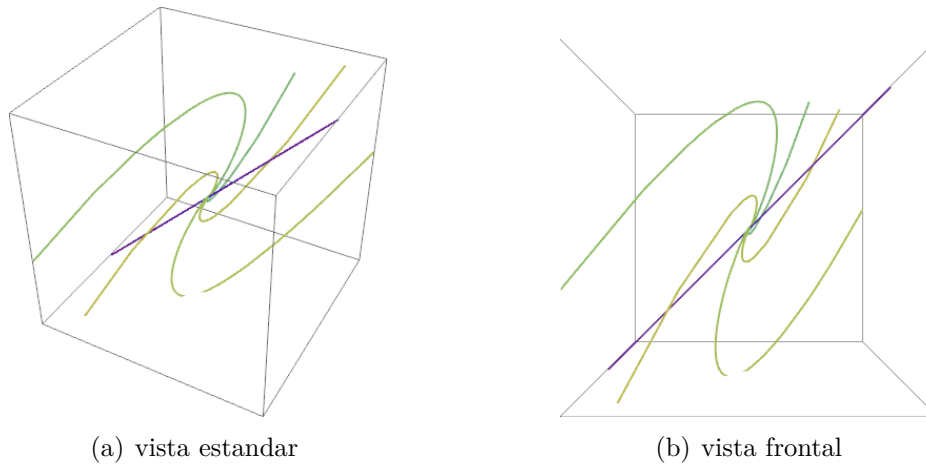


Figura 2.5: Output gráfico obtenido con el Mathematica.

Mathematica

Este es el código introducido en el Mathematica que genera el output mostrado en la figura 2.5.

```

1 eqns={x'[t]==-2x[t]+9y[t]-2z[t], y'[t]==2x[t]+5y[t]-2z[t], z'[t]==-3x[t]+13y[t]-z[t]};
2 NDSolve[{eqns,x[0]==0,y[0]==0,z[0]==0.001},{x,y,z},{t,0,20}];
3 g1=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
4   PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
5 NDSolve[{eqns,x[0]==4*10^14,y[0]==0,z[0]==4*10^14},{x,y,z},{t,0,20}];
6 g2=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
7   PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
8 NDSolve[{eqns,x[0]==0,y[0]==0.01,z[0]==0},{x,y,z},{t,0,20}];
9 g3=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
10  PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
11 NDSolve[{eqns,x[0]==0.001,y[0]==0,z[0]==0},{x,y,z},{t,0,20}];
12 g4=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
13  PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
14 NDSolve[{eqns,x[0]==0.001,y[0]==1,z[0]==0},{x,y,z},{t,0,20}];
15 g5=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
16  PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
17 NDSolve[{eqns,x[0]==4*10^14,y[0]==5,z[0]==4*10^14},{x,y,z},{t,0,20}];
18 g6=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
19  PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
20 NDSolve[{eqns,x[0]==-4*10^14,y[0]==0,z[0]==-4*10^14},{x,y,z},{t,0,20}];
21 g7=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}]/.%,{t,0,20},
22  PlotPoints->100,ColorFunction->(ColorData["Rainbow"][#4]&)];
23 Show[g1,g2,g3,g4,g5,g6,g7,PlotRange->{{-10^14,10^14},
24   {-10^14,10^14},{-10^14,10^14}},Axes->False]

```

- Línea 1: *eqns* define el sistema lineal. En nuestro caso hemos considerado el sistema lineal definido por la ecuación diferencial (2.3). Este parámetro, por supuesto, puede ser alterado para dar cualquier ecuación diferencial.
- Líneas 2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14: Resuelve el PVI del sistema formado por la ecuación diferencial *eqns*, con condición inicial x_0, y_0, z_0 y cuya variable independiente es t .
- Líneas 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15: La función **Evaluate**, como su nombre lo indica, evalúa la solución de los PVI encontrada anteriormente. Mientras que la función **ParametricPlot3D** produce una curva parametrizada por la variable t en un espacio tridimensional. Es decir, encuentra la trayectoria del sistema para cada una de las condiciones iniciales.

La trayectoria generada por la línea 3 la podemos observar en la figura 2.6.

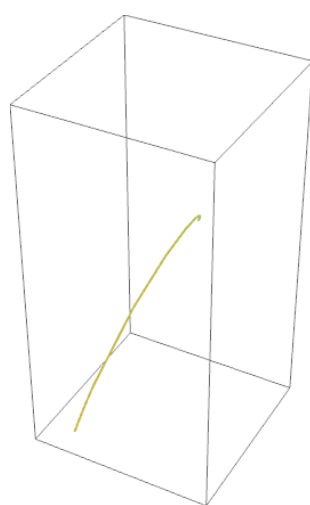


Figura 2.6: Trayectoria con condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{1}{1000})$.

- Línea 16: La función **Show** muestra varios gráficos combinados a la vez. De esta forma mostramos en un mismo gráfico todas las trayectorias antes encontradas.

Capítulo 3

Geometría diferencial en curvas y superficies

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar como se ven reflejados los hechos analíticos, utilizando ilustraciones de superficies, que se pueden ver en la asignatura de Geometría Diferencial en Curvas y Superficies, específicamente en el apartado de superficies. Para cumplir con el objetivo utilizaremos la interpretación que ofrece el Mathematica, implementando la traza de diversas superficies en \mathbb{R}^3 . Finalizaremos el capítulo imprimiendo modelos de superficies en 3D ya que con ellas podemos obtener de primera mano características analíticas reflejadas en dichos modelos. Además de crear un notebook que representa superficies paramétricas y su línea de estricción en el caso de superficies no cilíndricas. El primer paso es dar definiciones e ir implementando ejemplos para conseguir el propósito de este capítulo.

Preliminares

Antes, necesitaremos definir algunas operaciones.

Si $v = \sum_i v_i u_i$ y $w = \sum_i w_i u_i$, entonces el *producto escalar* de v por w es

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

y la norma o módulo de v es $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Si $\langle v, w \rangle = 0$ diremos que v y w son *ortogonales*, y si $|v| = 1$ diremos que v es unitario.

El *producto vectorial* de dos vectores v y w es el vector

$$w \wedge v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} k.$$

Si $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ entonces se tiene la *fórmula de Lagrange*

$$\langle v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2 \rangle = \begin{vmatrix} v_1 \cdot w_1 & v_1 \cdot w_2 \\ v_2 \cdot w_1 & v_2 \cdot w_2 \end{vmatrix}.$$

3.1. Superficies parametrizadas

Definición 3.1.0.1. Una superficie parametrizada de \mathbb{R}^3 es una aplicación diferenciable

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde U es un abierto no vacío de \mathbb{R}^2 . La traza de φ es la imagen de φ .

$$\varphi(U) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \exists (u, v) \in U \text{ tal que } (x, y, z) = \varphi(u, v)\}$$

Definición 3.1.0.2. Diremos que una superficie parametrizada $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es regular en un punto $q \in U$ si $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene rango 2. En este caso, $\text{Im}d_q\varphi$ es un subespacio vectorial de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 que llamaremos plano tangente a φ en el punto q , y lo denotaremos $T_q\varphi$.

Diremos que φ es una superficie parametrizada regular si es regular en todo $q \in U$.

Proposición 3.1.1. Una superficie parametrizada de \mathbb{R}^3 es regular, si y solo si, el vector $\varphi_u \wedge \varphi_v$ es no nulo, para todo $q = (u, v) \in U$.

Ejemplos 3.1.2. Paraguas de Whitney: $\varphi(u, v) = (uv, u, v^2)$ [Figura 3.1(a)]. Se tiene que $\varphi_u \wedge \varphi_v = \{2v, 2uv - 2v^2, -u\}$. El punto $(0, 0)$ es el único punto no regular.

Superficie sinusoidal: $\varphi(u, v) = ((2 + \sin u) \cos v, (2 + \sin u) \sin v, u)$ [Figura 3.1(b)]. Es un ejemplo de superficie de revolución.

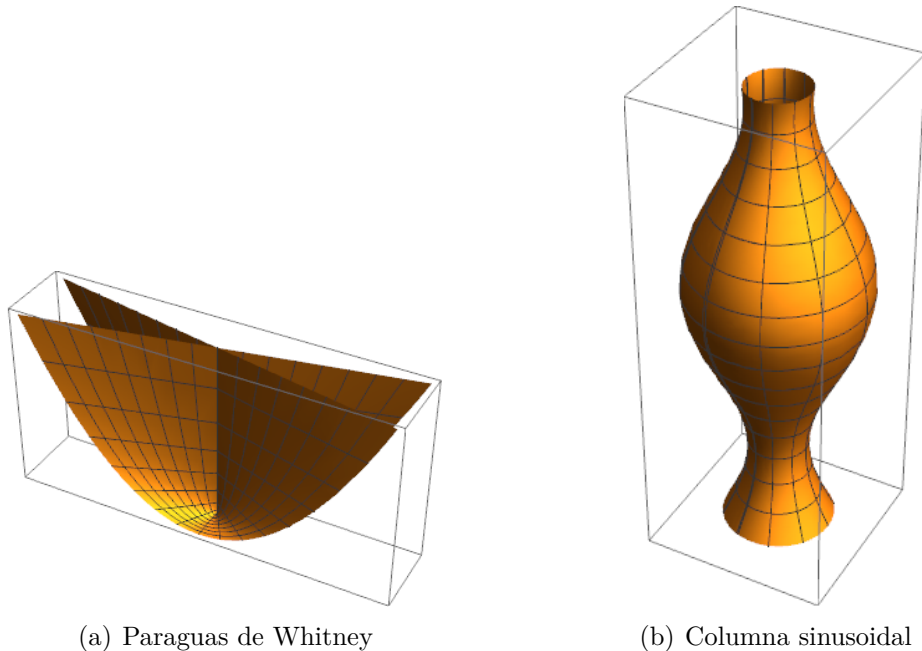


Figura 3.1: Superficies parametrizadas

3.2. Superficies regladas

Una superficie reglada es la superficie descrita por una recta móvil en el espacio. Nos referiremos a una recta móvil como familia uniparamétrica de rectas.

Definición 3.2.0.1. *Una familia uniparamétrica de rectas de \mathbb{R}^3 es una familia $\{L_u\}_{u \in I}$ de rectas L_u de \mathbb{R}^3 , donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} , tal que existen aplicaciones diferenciables*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, w : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde $\alpha(u) \in L_u$ es un punto de paso y $w(u)$ es un vector director de la recta L_u , para todo $u \in I$.

La forma paramétrica de la recta L_u es $\alpha(u) + v \cdot w(u)$, para $v \in \mathbb{R}$. Si dejáramos variar de manera simultánea los parámetros u y v obtendríamos una superficie parametrizada.

Definición 3.2.0.2. *Sea $\{L_u\}_{u \in I}$ una familia uniparamétrica de rectas. La aplicación*

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$$

es una superficie parametrizada llamada superficie reglada asociada a la familia $\{L_u\}_{u \in I}$.

Las rectas L_u son las generatrices de la superficie reglada, y la curva α es una directriz.

Ejemplo 3.2.1. $\varphi(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, 1, 0)$ [Figura 3.2(a)] es una superficie reglada. Su traza es el plano $\{z = 0\}$.

A continuación daremos la caracterización geométrica de superficie cilíndrica.

Definición 3.2.1.1. *Se dice que una superficie reglada es cilíndrica si todas sus generatrices son paralelas a una dirección fija. Si w es el vector director de las generatrices, esta condición es equivalente al hecho de que la dirección de w sea paralela a una dirección constante.*

La superficie reglada del ejemplo 3.2.1 es cilíndrica. En efecto, vemos que la dirección del vector $w = (0, 1, 0)$ (vector director de las generatrices) es paralela a una dirección constante [Figura 3.2(a)]. Además se puede observar el hecho de que existe una directriz perpendicular a las generatrices, esto se cumple ya φ es cilíndrica.

La siguiente proposición define analíticamente el hecho de ser cilíndrica.

Proposición 3.2.2. *Sea $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$ una superficie reglada. Se tiene que φ es cilíndrica si, y solo si, $w \wedge w' = 0$.*

Ejemplo 3.2.3. $\varphi(u, v) = (4 \cdot \cos u, 4 \cdot \sin u, 0) + v(0, 0, 1)$ [Figura 3.2(b)] es cilíndrica. La imagen nos permite ver que las generatrices son paralelas a una dirección fija, por lo tanto se tiene que la superficie reglada es cilíndrica. Analíticamente, tenemos que $w = (0, 0, 1)$ es el vector director de las generatrices y se cumple que $w \wedge w' = 0$.

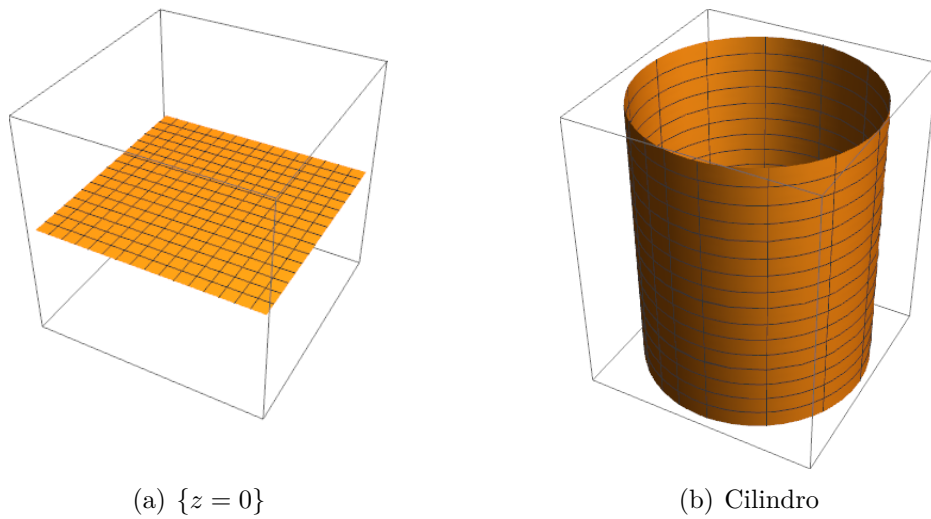


Figura 3.2: Algunos ejemplos de superficies regladas.

Utilizaremos el adjetivo *no cilíndrica* para referirnos a superficies regladas que satisfacen, punto a punto, la condición contraria a la de superficie cilíndrica. Por lo tanto, esta condición no coincide exactamente con la negación de la condición de superficie cilíndrica.

Definición 3.2.3.1. Sea $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$ una superficie reglada. Si $w \wedge w' \neq 0$ para todo $u \in I$, diremos que la superficie es *no cilíndrica*.

Proposición 3.2.4. Sea $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$ una superficie reglada, con $|w| = 1$. Si φ es no cilíndrica, entonces existe una única directriz $\tilde{\alpha}$ tal que $\langle \tilde{\alpha}', w' \rangle = 0$. A de más $\tilde{\alpha}$ está definida por

$$\tilde{\alpha}(u) = \alpha(u) - \frac{\langle \alpha'(u), w'(u) \rangle}{|w'(u)|^2} \cdot w(u).$$

Definición 3.2.4.1. Sea $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$ una superficie reglada no cilíndrica. La curva $\tilde{\alpha}$ de la proposición anterior se llama *línea de estricción* de φ . El punto $\tilde{\alpha}(u) \in L_u$ se llama el *punto central* de la generatriz L_u .

Proposición 3.2.5. Sea $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$ una superficie reglada, con $|w|$ no necesariamente unitario. Entonces la línea de estricción es.

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\langle \alpha' \wedge w, w' \wedge w \rangle}{|w' \wedge w|^2} \cdot w.$$

Definición 3.2.5.1. Una superficie reglada se llama *cónica* si todas las generatrices pasan por un punto fijo.

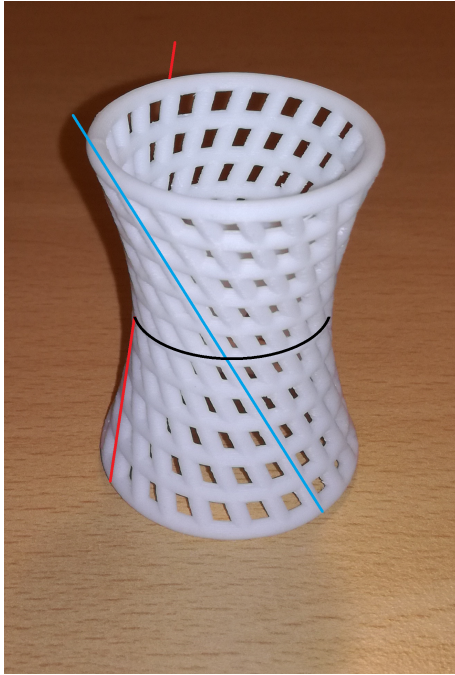
Proposición 3.2.6. Si $\{L_u\}_{u \in I}$ es una familia de generatrices que pasan por un punto fijo p , entonces tiene una superficie reglada de la forma

$$\varphi(u, v) = p + v \cdot w(u)$$

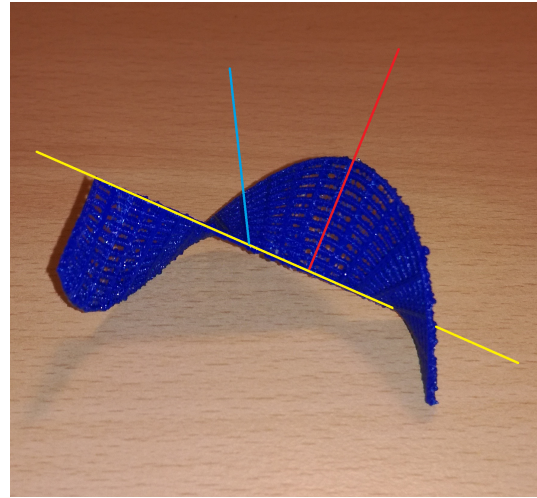
Además, si φ es no cilíndrica, la línea de estricción es $\alpha(u) = p$, para todo $u \in I$.

Proposición 3.2.7. *Si φ es una superficie reglada no cilíndrica con línea de estricción constante, entonces φ es una cónica.*

A continuación utilizaremos modelos de superficies regladas implementados con el Mathematica y construidos con una impresora 3D, explicando las distintas características que se obtienen a partir de esta representación.



(a) Hiperboloide de revolución de una sola hoja



(b) Helicoide recto

Figura 3.3: Superficies impresas.

Ejemplo 3.2.8. La figura 3.3(a) representa un hiperboloide de revolución de una sola hoja, el cual admite la parametrización $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v \cdot (\sin u, -\cos u, 2)$.

La superficie reglada es no cilíndrica. Analíticamente se cumple que $w \wedge w' = 0$. Gráficamente, si denotamos w_r al vector director de la generatriz pintada de color rojo y w_a al vector director de la generatriz pintada de color azul, se tiene que w_a y w_r no son paralelos a una dirección constante.

La línea de estricción del hiperboloide de una hoja es $(\cos u, \sin u, 0)$. En la figura 3.3(a) está representada por la curva de color negro, se puede observar el hecho de que los puntos $\tilde{\alpha}(u) \in L_u$ ocupan los puntos centrales de las rectas L_u .

La definición 3.2.5.1 nos asegura que la superficie no es cónica ya que la línea de estricción no es un punto.

Ejemplo 3.2.9. El helicoide recto [Figura 3.3(b)] es la superficie reglada generada por una recta móvil que une el eje Oz con la hélice $\alpha(u) = (a \cdot \cos u, a \cdot \sin u, bu)$ perpendicularmente al eje Oz . La expresión analítica es,

$$\varphi(u, v) = (a \cdot \cos u, a \cdot \sin u, bu) + v(\cos u, \sin u, 0).$$

La generatriz L_u es normal al eje Oz y gira al rededor de este eje formando un ángulo u con su posición inicial L_0 . Además, el desplazamiento de L_u a lo largo de Oz es bu . Como ejemplo se pueden observar las generatrices pintadas de color rojo (L_r) y azul (L_a).

La superficie reglada φ es no cilíndrica. Los vectores directores w_r y w_a de las generatrices L_r y L_a no son paralelos a una dirección constante.

La línea de estricción del helicoido recto es $(0, 0, bu)$. En la figura 3.3(b) está representada por la recta de color amarillo, la cual coincide con el eje Oz .

3.3. Implementación y construcción 3D de superficies regladas

Traza de superficies regladas

Para nuestros propósitos, creamos un notebook que representa cualquier superficie reglada en \mathbb{R}^3 , de manera que facilite los cálculos y sirva de ayuda al desarrollo de este capítulo.

El siguiente código del Mathematica dibuja la traza de una superficie paramétrica. Además calcula y dibuja la línea de estricción correspondiente a la superficie.

```

1  alfa = Input["Directriz"];
2  g1[u_] := alfa[[1]];
3  g2[u_] := alfa[[2]];
4  g3[u_] := alfa[[3]];
5  alfaD = {D[g1[u], u], D[g2[u], u], D[g3[u], u]};
6  w = Input["Vector director de las generatrices"];
7  g1[u_] := w[[1]];
8  g2[u_] := w[[2]];
9  g3[u_] := w[[3]];
10 wD = {D[g1[u], u], D[g2[u], u], D[g3[u], u]};
11 vectA = {alfaD[[2]]*w[[3]] - alfaD[[3]]*w[[2]], alfaD[[3]]*w[[1]] - alfaD[[1]]*w[[3]], alfaD[[1]]*w[[2]] - alfaD[[2]]*w[[1]]};
12 vectB = {wD[[2]]*w[[3]] - wD[[3]]*w[[2]], wD[[3]]*w[[1]] - wD[[1]]*w[[3]], wD[[1]]*w[[2]] - wD[[2]]*w[[1]]};
13 vectAB = alfaD.wD.w - w.wD.alfaD.w; (*Formula de Lagrange*)
14 escalarC = Norm[vectB];
15 Echo["Línea de estricción:"]; linEstriccion = alfa - vectAB (1/escalarC^2).w
16 Show[ParametricPlot3D[alfa + v w, {u, -5, 5}, {v, -5, 5}, Axes -> False], ParametricPlot3D[linEstriccion, {u, -5, 5}, {v, -5, 5}, Axes -> False] /. Line[pts_, rest_>> Tube[pts, 0.2, rest]]

```

- Línea 1: Pide al usuario la directriz de la superficie reglada.
- Líneas 2, 3 y 4: Derivan los componentes de la directriz respecto a la variable u .
- Línea 5: Define la derivada de la directriz.

- Línea 6: Pide al usuario el vector director de la superficie reglada.
- Líneas 7, 8 y 9: Derivan los componentes del vector director de las generatrices respecto a la variable u .
- Línea 10: Define la derivada del vector director de las generatrices.
- Línea 11: Realiza la operación $\langle \alpha' \wedge w, w' \wedge w \rangle$.
- Línea 12, 13, 14 y 15: Calcula y muestra linea de estricción de la superficie paramétrica.

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\langle \alpha' \wedge w, w' \wedge w \rangle}{|w' \wedge w|^2} \cdot w$$

- Línea 16: Dibuja la superficie paramétrica junto a con su linea de estricción.

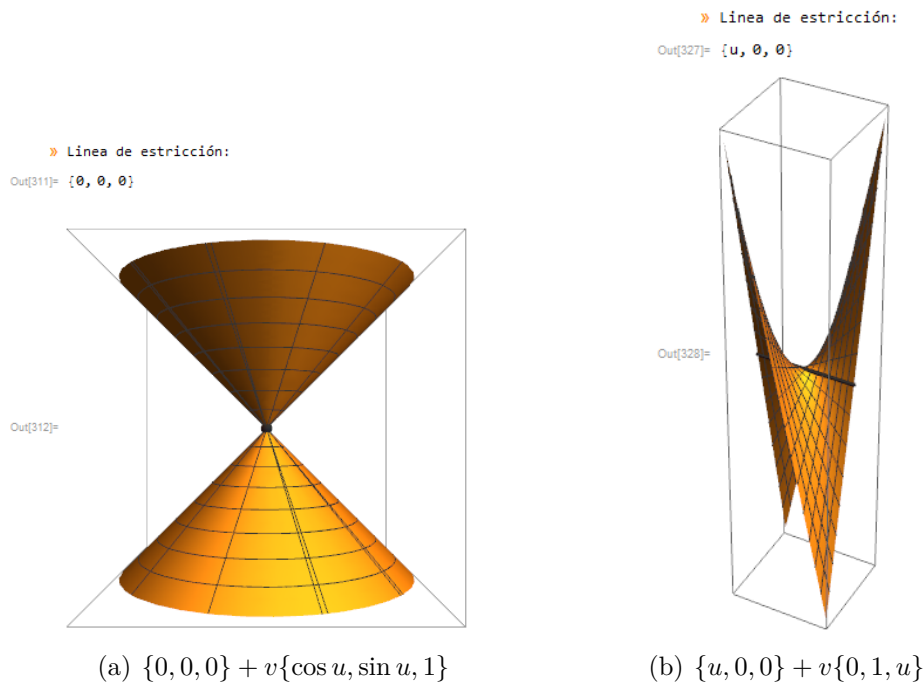


Figura 3.4: Outputs notebook.

Implementación del STL

Con la ayuda del Mathematica se ha podido reproducir el modelo de una superficie reglada en forma de malla, en este caso se ha implementado el modelo de un hiperboloide de una sola hoja. Este tipo de modelos se pueden utilizar como herramientas pedagógicas en una clase de geometría diferencial en curvas y superficies por ejemplo.

Primero se genera un output gráfico, luego se exporta aquel dato gráfico como una malla en formato STL¹. Este archivo STL nos define la geometría de nuestro objeto 3D,

¹STL, siglas provenientes del inglés "Standard Tessellation Language"

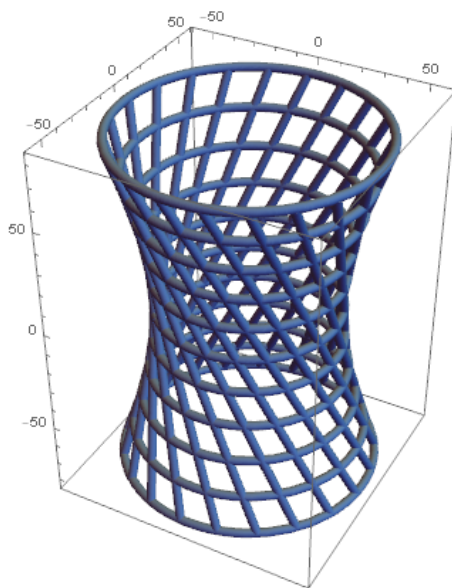
excluyendo información como color, texturas o propiedades físicas. El archivo consiste esencialmente en una larga lista de triángulos, cada triángulo dado por las coordenadas en 3 dimensiones de sus tres esquinas. Una impresora 3D toma esta lista de triángulos e interpreta su unión como una superficie cerrada orientable dentro de \mathbb{R}^3 , a partir de la cual puede determinar qué vóxeles (unidades tridimensionales de las cuales se compone un objeto tridimensional) están dentro de la superficie (y por lo tanto deben ser sólidos, rellenos de plástico o cualquier material que la impresora esté usando) y cuales están fuera de la superficie (y por lo tanto deben estar vacíos), la posición (x, y, z) de un vóxel en el espacio se deduce por la posición del vóxel dentro del archivo de datos.

Este es el código que genera el gráfico output mostrado en la figura 3.5(a), junto con el archivo STL de la figura 3.5(b).

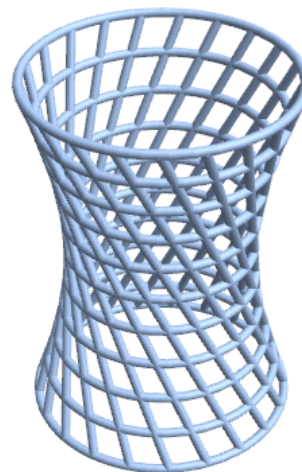
```

1  f[u_, v_] := {Cos[u] + v*Sin[u], Sin[u] - v*Cos[u], 2 v};
2  scale = 40;
3  radius = 2;
4  numPoints = 24;
5  gridSteps = 10;
6  curvesU = Table[scale*f[u, i], {i, -1, 1, 2/gridSteps}];
7  curvesV = Table[scale*f[j, v], {j, -3, 3, 3/gridSteps}];
8  tubesU = ParametricPlot3D[curvesU, {u, -4, 4},
PlotStyle -> Tube[radius, PlotPoints -> numPoints],
PlotRange -> All];
9  tubesV = ParametricPlot3D[curvesV, {v, -1, 1},
PlotStyle -> Tube[radius, PlotPoints -> numPoints],
PlotRange -> All];
10 output = Show[tubesU, tubesV];
11 Export["HiperboloideDe1Hoja_A2.stl", output]
12 Import["HiperboloideDe1Hoja_A2.stl"]

```



(a) output gráfico del mathematica



(b) Archivo STL

Figura 3.5: Hiperboloide de una sola hoja.

- Línea 1: Define la parametrización de una superficie. En nuestro caso hemos considerado el hiperboloide de una sola hoja que tiene por ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La cual admite una parametrización como una superficie reglada por

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (a \cos u, a \sin u, 0) + v \cdot (\sin u, -\cos u, \frac{c}{a}) = \\ &= (a \cos u + v \sin u, a \sin u - v \cos u, v \frac{c}{a}). \end{aligned}$$

con $a = 1$ y $c = 2$.

Esto, por supuesto, puede ser alterado para dar cualquier superficie paramétrica deseada.

- Línea 2: Define un factor de escala en milímetros, el cual se muestra en el modelo final.
- Línea 3: Define el radio de la sección tubular alrededor de las curvas, en milímetros. Hemos visto que los modelos con radio 2 son más estables.
- Línea 4: Define el número de puntos en la representación. Especifica cuántos puntos de muestra inicial utilizar.



(a) numPoints=24



(b) numPoints=2

Figura 3.6: PlotPoints.

La diferencia entre el número de puntos que se utilizan en la imagen 3.6(a) y la imagen 3.6(b) define la calidad de la figura. En nuestro caso al tener como fin imprimir la imagen utilizamos más puntos.

- Línea 5: Define el número de cuadrados en cada dirección en la cuadrícula parametrizada.
- Líneas 6 y 7: Producen listas de valores al evaluar la función con parámetro u y v respectivamente, que dan las curvas de “línea de cuadrícula” en las dos direcciones.

- Líneas 8 y 9: Producen los datos gráficos para las secciones tubulares de las funciones de curvas de las líneas 6 y 7 respectivamente. La función **PlotStyle** indica al programa que represente las curvas como tubos con el radio dado. La función **PlotPoints** [Figura 3.6] indica el número de lados que deben tener los tubos. Finalmente, la función **PlotRange** asegura que no recorte ninguna parte de la geometría.
- Línea 10: **Show** muestra los dos conjuntos de objetos gráficos 3D juntos en el mismo espacio.
- Línea 11: **Export** exporta la malla correspondiente a esos objetos gráficos, convirtiéndolos al formato correspondiente a la extensión data, en nuestro caso a formato STL [Figura 3.5(a)].
- Línea 12: **Import** importa nuestro archivo STL, nos devuelve una vista del formato STL leída por el lenguaje Wolfram [Figura 3.5(b)].

Construcción

El archivo STL que generamos anteriormente está listo para cargarse en una impresora 3D tal como está. En la figura 3.7 se puede observar el resultado final de la impresión.



Figura 3.7: Impresión 3D de un hiperboloide de revolución de una hoja.

Capítulo 4

Mathematica e impresión 3D

En este capítulo veremos distintas ilustraciones obtenidas con el Mathematica que pueden servir para demostraciones [7] o para poder visualizar características analíticas [9]. Además de mostrar algunos modelos impresos.

4.1. Ilustraciones

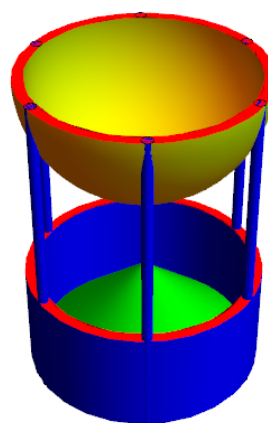
Las siguientes ilustraciones son gráficos obtenidos con el Mathematica que pueden imprimirse. Estas a menudo necesitan adaptaciones porque una impresora no puede imprimir objetos de grosor cero.

Volumen de la esfera

Demostración de Arquímedes [7] sobre el volumen de la esfera, $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Asumiendo que el radio de la esfera es conocido, r . El volumen de la semiesfera de radio r es igual a la diferencia entre el volumen de un cilindro de radio r y altura r y el volumen de un cono de radio r y altura r .

Analíticamente,

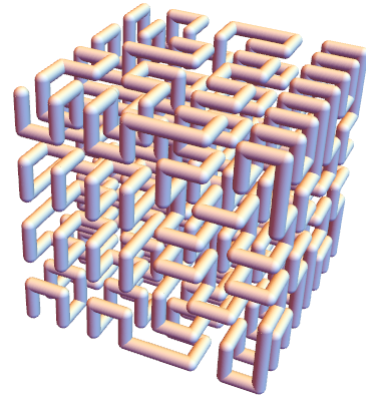
$$\begin{aligned}V_{cilindro} &= \pi r^3 \\V_{cono} &= \frac{1}{3}\pi r^3 \\V_{semiesfera} &= V_{cilindro} - V_{cono} \\V_{esfera} &= 2 \cdot V_{semiesfera} = \frac{4}{3}\pi r^3.\end{aligned}$$



Curva de Hilbert en 3D

La curva de Hilbert [5] es una curva fractal continua que recubre el plano descrita inicialmente por el matemático alemán David Hilbert en 1891.

La ilustración muestra la tercera iteración de la curva de Hilbert.



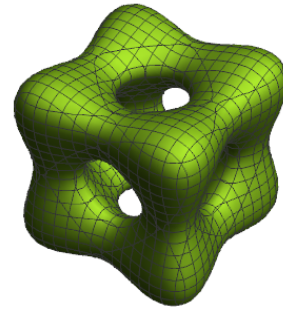
The Banchoff-Chmutov surfaces

Las superficies Banchoff-Chmutov es una familia de superficies

$$BC_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

$$T_n(x) + T_n(y) + T_n(z) = 0\},$$

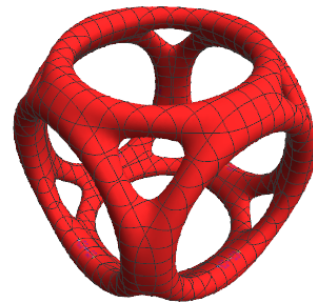
donde T_n denota el n -ésimo polinomio de Chebishev. La ilustración muestra la superficie BC_4 .



Superficie en forma implícita

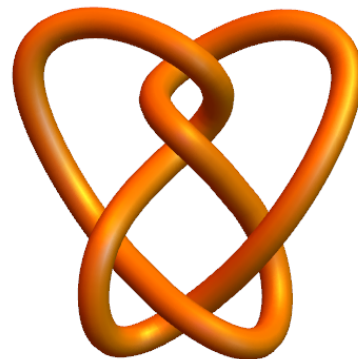
La ilustración muestra la superficie generada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ((x^2 + y^2 - 0,85^2)^2 + (z^2 - 1)^2) + ((y^2 + z^2 - 0,85^2)^2 + (x^2 - 1)^2) + ((z^2 + x^2 - 0,85^2)^2 + (y^2 - 1)^2) - 0,001 = 0\}$$



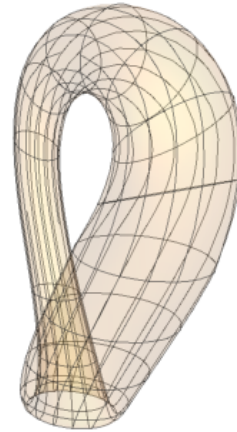
Nudo 5_2

Utilizando el convenio notacional [1] para tabular las clases de equivalencia de nudos, obtenemos que la ilustración muestra el nudo 5_2 , el cual es uno de los dos nudos que tienen cinco cruces. Este tipo de elementos se estudian en teoría de nudos.



Botella de Klein

La ilustración muestra la botella de Klein, denotada por \mathbb{K}^2 , la cual se define como el cociente de $[0,1]^2$ por la relación de equivalencia \simeq que identifica $(0,t) \simeq (1,t)$ y $(t,1) \simeq (1-t,0)$, si $0 \leq t \leq 1$. Además, está determinada por la presentación $\langle a, b | aba^{-1}b \rangle$ [9].



4.2. Impresión 3D

Los diversos modelos que se imprimieron a lo largo del trabajo se realizaron en colaboración con el CESIRE del Departamento de Enseñanza de Cataluña, el cual está desarrollando un trabajo de investigación centrado en la utilización didáctica de la impresión 3D para niveles educativos no universitarios y cuenta con cinco impresoras 3D.

La impresión de las piezas más sencillas fue hecha utilizando una impresora de un solo extrusor (Mini UP 2), mientras que las más complejas fueron realizadas por una impresora de doble extrusor (BCN3D Sigma), las cuales utilizan un sistema de impresión de material fundido (FDM). El material utilizado para la impresión de las diferentes piezas ha sido el PLA (Poliácido Láctico), el cual es un termoplástico biodegradable con un rango de extrusión de entre 200 y 220 grados centígrados.

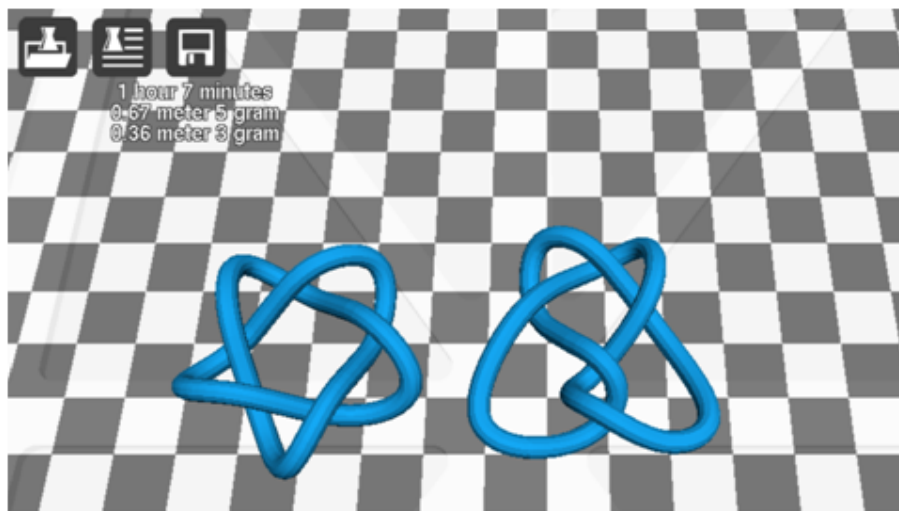


Figura 4.1: Visualización del modelo antes de imprimir.

La impresora MiniUp 2 utiliza un software creado específicamente para ella, el cual es UP Studio, mientras que en el caso de la impresora BCN3D Sigma se utiliza el software

libre Cura¹. A partir del archivo STL genérico creado con el programa de edición 3D, en nuestro caso el Mathematica, los programas generan el archivo .gcode², el cual es utilizado por la impresora para imprimir [Figura 4.1].

En el programa de impresión se pueden configurar diferentes parámetros, los cuales dependen de los acabados deseados en el modelo. De manera que, la altura de capa, la velocidad de impresión, el tipo de estructura de soporte y la densidad serán parámetros que incidirán directamente en la calidad final de la pieza y el tiempo de impresión.

Las piezas más complejas suelen necesitar una estructura de soporte para su correcta impresión, este problema se es solventado por el mismo software. En la imagen 4.2 se puede ver la estructura secundaria en color verde.

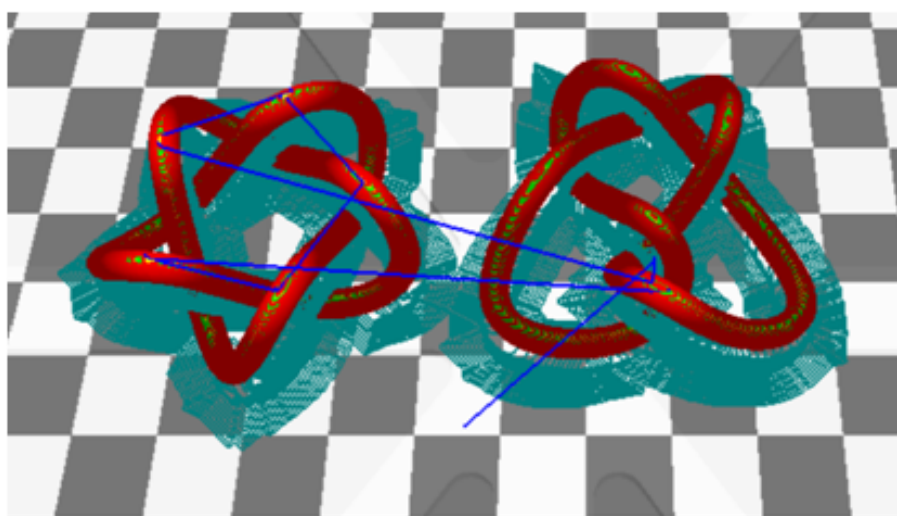


Figura 4.2: Estructura secundaria.

Se ha utilizado PLA (Ácido poliláctico) en el extrusor principal para imprimir los nudos y el PVA (Acetato de polivinilo) en el extrusor secundario para imprimir toda la estructura de soporte, ya que se trata de un material hidrosoluble [Figura 4.3] y es fácil de eliminar lo cual permite que el material no quede atrapado dentro de las piezas. Además de escalar algunos modelos por medio del software Cura.



Figura 4.3: Disolución del material hidrosoluble.

¹Programa “Open Source” desarrollado por ultimaker para la comunicación con la impresora y el laminado de objetos 3D

²El G-code es el nombre que habitualmente recibe el lenguaje de programación más usado en control numérico, es un lenguaje mediante el cual las personas pueden decir a máquinas herramienta controladas por computadora qué hacer y cómo hacerlo.

Conclusión

Esta sección contiene las conclusiones extraídas del trabajo, las cuales se pueden clasificar en generales y específicas. Además de contener las propuestas de mejora del trabajo.

Conclusiones generales

Concluimos el trabajo cumpliendo el propósito de este, el cual fue desde un principio el uso del software Mathematica para la implementación 3D de diversos modelos matemáticos. Partiendo de la información analítica de los objetos estudiados, nos introducimos en las características visuales de los mismos. Se intentó que los objetos estudiados estuvieran al alcance del nivel exigido por la universidad para el desarrollo de un trabajo final de grado. No hay que obviar que en los capítulos 2 y 3 la parte teórica es realmente importante para saber cómo poder caracterizar las imágenes que estamos viendo.

Continuando con el comentario sobre la importancia de la teoría que hay detrás de las imágenes e introduciéndonos en el estudio hecho en el segundo capítulo, concluimos que, por ejemplo, sin el teorema de *existencia y unicidad de soluciones maximales* [13] no justificaríamos la no existencia de órbitas que crucen otras órbitas, ya que “tener un número limitado de soluciones de un sistema” no generaliza la unicidad de soluciones. Por lo cual recalcamos que siempre las ilustraciones deben de estar fundamentadas y acompañadas por la teoría respectiva. El poder representar el retrato de fase de sistemas en \mathbb{R}^3 me ha parecido un buen objeto de estudio visual ya que esto no se plantea en las asignaturas obligatorias del grado y existen modelos como el atractor de Lorenz [Figura 2.1] que son modelos interesantes de estudiar y que, en este trabajo, solo hemos podido estudiarlos muy poco sin poder introducirnos mucho más por cuestión de tiempo. Además, pudimos utilizar la implementación de diversos retratos de fases para ilustrar las consecuencias del teorema de *conjugación topológica de sistemas lineales hiperbólicos*.

Pasando al tercer capítulo, el hecho de ilustrar las características analíticas de las superficies regladas se planteó desde el inicio como un estudio de carácter obligatorio en este proyecto, ya que en la asignatura donde se estudia esta teoría no se considera en ningún momento este hecho, lo cual es lógico pensando en el poco tiempo que disponen las asignaturas para su desarrollo; convirtiendo este tema en una parte importante del proyecto, ya que las superficies viven en \mathbb{R}^3 y es un buen objeto de estudio visual para cualquier matemático. Terminado con la impresión de diversas superficies las cuales dan bastante juego a la hora de entender y visualizar diversas características analíticas.

El capítulo final supuso un reto especial para mi ya que en la búsqueda de información para el desarrollo del trabajo se encontraron modelos de imágenes con un importante trasfondo matemático, luego en este capítulo se planteó el reto de conseguir implemen-

tarlas con el Mathematica e imprimirlas. Aprendiendo de esta forma un poco más sobre las funcionalidades que tiene este software.

Como conclusión sobre el uso del Mathematica, cabe recalcar que este software muestra los modelos desde cualquier punto de vista en el espacio, ya que usa una vista dinámica del objeto, esta característica la convierte en un potente instrumento para el estudio visual de las ecuaciones diferenciales en el espacio y de superficies. En las imágenes de la memoria esto no se ve reflejado ya que estas no dejan de ser imágenes y por lo tanto solo se muestra el punto de vista estándar, frontal y aéreo del modelo. Además de resolver fácilmente el *Problema del Valor Inicial* en cuestión de segundos en el caso de las ecuaciones diferenciales.

Conclusiones específicas

- Trabajar con el Mathematica [15] nos ofrece un gran margen de grafismo en 2D/3D y tanto el tiempo como el código que supondría haber programado en lenguajes como c++ o R Mathematica lo acota ya que nos ofrece funciones como **ParametricPlot3D** (con la que hemos estado trabajando para ilustrar las ecuaciones diferenciales y las superficies parametrizadas) o **Graphics3D** las cuales aportan una gran ayuda a la hora de representar un modelo matemático.
- Utilizando el Mathematica se ha podido implementar un notebook que modela el comportamiento de las trayectorias de un sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^3 . Es decir, dado el sistema y su condición inicial (o condiciones iniciales) el programa resuelve el problema del valor inicial y representa las trayectorias.
- Respecto a la implementación final del notebook, cabe mencionar que no es la que esperábamos en un principio ya que se pensaba crear un notebook que permita introducir de manera automática el sistema y las condiciones iniciales, lo cual no pasa en la implementación actual, ya que el sistema y sus condiciones se han de introducir de manera manual.
- En el caso de las trayectorias, se han podido realizar dos estudios. En el primero se hace un estudio cualitativo del atractor de Lorenz a partir de dos órbitas cuyas condiciones iniciales están distanciadas en $2 \cdot 10^{-3}$ en la coordenada x , observando de esta forma el caos producido en el sistema. En el segundo estudio se ha podido evaluar cuatro sistemas utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales que converge en la clasificación topológica de sistemas lineales hiperbólicos.
- Se ha podido crear un notebook que representa cualquier superficie reglada junto con su línea de estricción, dando un sentido visual a las características analíticas de distintas superficies paramétricas.
- En el caso de las superficies regladas, hemos podido caracterizar los modelos obtenidos utilizando elementos como la línea de estricción en el caso que la superficie sea no cilíndrica y distintos resultados numéricos que cumple la superficie.
- Los modelos impresos en 3D de superficies regladas permiten visualizar las generatrices de la superficie, lo que implica concluir características analíticas como ser

una superficie cilíndrica o no cilíndrica, representación gráfica de línea de estricción y concluir si es una superficie cónica.

Propuestas de mejora

- Respecto a la implementación final del notebook que representa retratos de fase de sistemas de ecuaciones diferenciales en el espacio, cabe mencionar no es la que esperábamos en un principio ya que se pensaba crear un programa que permita introducir de manera automática el sistema y las condiciones iniciales, lo cual no pasa en la implementación actual, ya que el sistema y sus condiciones se han de introducir de manera manual.
- Se podría estudiar la posible implementación de un ejecutable usando un lenguaje de programación visto en los estudios del grado, como por ejemplo c, c++ o R.
- El siguiente paso de este proyecto podría ser la implementación de demostraciones³ interactivas hechas con el Mathematica.

³Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com>

Bibliografía

- [1] ADAMS, C. *The Knot Book: an Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. Providence, 2004, p 280-281. [consulta: 20 de junio del 2017]. ISBN 0821836781.
- [2] Departamento de Matemática Aplicada. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Superficies regladas. En *dma.aq.upm.es* [en línea]. [consulta: 5 de junio del 2017]. Disponible a: http://dma.aq.upm.es/profesor/rosado_e/CS_SuperficiesRegladas.pdf
- [3] GUILLÉN, F. *Geometría diferencial en corbes i superfícies*. Barcelona, 2012, p 1; 29-41. [consulta: 10 de mayo del 2017].
- [4] HERNÁNDEZ Y RIVAS. *Grupo fundamental, superficies, nudos y aplicaciones recubridoras*. Universidad de la Rioja, 2008, p 65-73. [consulta: 25 de junio del 2017].
- [5] Interactive demonstrations. En *Wolfram MathWorld* [consulta: 1 de abril del 2017]. Disponible a: <http://mathworld.wolfram.com/notebooks/Fractals/HilbertCurve.nb>
- [6] KNILL Y SLAVKOVSKY. *Illustrating mathematics using 3D printers*. 2013, p 1-7. [consulta: 5 de marzo del 2017]. Disponible a: <http://www.math.harvard.edu/~knill/3dprinter/documents/trieste.pdf>
- [7] KNILL Y SLAVKOVSKY. *Thinking like Archimedes with a 3D printer*. 2013, p 1-18. [consulta: 7 de marzo del 2017]. Disponible a: <http://www.math.harvard.edu/~knill/3dprinter/documents/paper.pdf>
- [8] LYN, D. English. *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. New Jersey : Queensland University of Technology, 1997. ISBN 0805819789.
- [9] MACHO, M. *Topología Algebraica*. País Vasco, 2007, p 11-12; 32; 36. [consulta: 25 de junio del 2017].
- [10] MANCOSU, Paolo. *Visualizing in Mathematics*. Dentro: Mancosu, Paolo. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford : Oxford University Press, 2008, p. 22-42. ISBN 9780199296453.
- [11] PRESMEG, Norma. *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. 2006, p 2-3. [consulta: 10 de junio del 2017]. Disponible a: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>
- [12] SEGERMAN. *3D printing for mathematical visualisation*. 2016, p 1-10. [consulta: 25 de mayo del 2017]. Disponible a: https://math.okstate.edu/people/segerman/papers/3d_printed_visualisation.pdf

- [13] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979, p 49-82. [consulta: 4 de abril del 2017]. ISBN 9216050624.
- [14] Thingiverse. Design community for discovering, making, and sharing 3D printable things. En *www.thingiverse.com* [en línea]. [consulta: 21 de julio del 2017]. Disponible a: <https://www.thingiverse.com/>
- [15] Wolfram Research Inc. Wolfram Mathematica v. 11[con licencia UB][consulta: 5 de junio del 2017].